UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA2112. Enero-Abril 2010
Primer parcial (50%)
lunes 22 de febrero 2010

TIPO C

1.- (12 ptos.) Estudie los siguientes límites
[es decir, para cada uno de los límites dados, diga justificando si existe o no existe y en el caso que exista, calcúlelo] :

a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^4-x^3-y^4+1}{1+xy^2-x-y^2}$

b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4+y^2}$.

2.- (12 ptos.) Dadas las funciones derivables f(t) , $g(x, y)= \dfrac{y}{x^2-y^2}$, verifique que la función compuesta H(x, y) = f(g(x, y)) cumple con la siguiente identidad :

$$(x^2+y^2)\frac{\partial H}{\partial x} +2xy\frac{\partial H}{\partial y} = 0 ;$$

3.-(12 ptos.) Determine los puntos del hiperboloide representado por la ecuación

$$x^2-2y^2-4z^2 = 40,$$

en los cuales el plano tangente es paralelo al plano de ecuación $4x-2y+4z=5$.

4.- (14 ptos.)Halle las dimensiones del paralelepípedo de volumen máximo, ubicado en el primer octante, con aristas paralelas a los ejes, un vértice en el origen y el vértice opuesto sobre el elipsoide de ecuación : $(a, b, c)\in \{(x, y, z)\in R^3 \mid 16x^2+4y^2+4z^2= 144\}$.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA2112. Enero-Abril 2010
Primer parcial (50%)
lunes 22 de febrero 2010

TIPO C

SOLUCION

1.- a) $L = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^4-x^3-y^4+1}{1+xy^2-x-y^2}$. Tratándose de una función continua [por teoremas y propiedades conocidas] y por pertenecer (0, 0) al dominio de la función, el límite existe y se puede hallar "por sustitución simple" , obteniendo L = 1 ;

b) $M = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^4+y^2} = ?$

Consideremos en primer lugar los límites iterados :

$\lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = \dfrac{0}{y^2} = 0$;

$\lim\limits_{y\to 0} (\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)) = 0$;

$\lim\limits_{y\to 0} f(x, y) = \dfrac{0}{x^4} = 0$;

$\lim\limits_{x\to 0} (\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)) = 0$;

luego observemos que acercándonos a (0, 0) a lo largo de la parábola de ecuación $y=x^2$ se tiene : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^4}{2x^4} = \dfrac{3}{2} \neq 0$ y como hay puntos de la parábola tan cercanos al origen cuanto se quiera, el límite no existe.

2.- $H(x, y) = f(g(x, y))= f(\dfrac{y}{x^2-y^2})$;

$$\frac{\partial H}{\partial x} = f '(\frac{y}{x^2-y^2})\frac{\partial g}{\partial x} = f '(\frac{y}{x^2-y^2})(\frac{-2xy}{(x^2-y^2)^2}) ;$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = f '(\frac{y}{x^2-y^2})\frac{\partial g}{\partial y} = f '(\frac{y}{x^2-y^2})(\frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}) ;$$

luego $(x^2+y^2)\dfrac{\partial H}{\partial x} +2xy\dfrac{\partial H}{\partial y} = (x^2+y^2) f '(\dfrac{y}{x^2-y^2})(\dfrac{-2xy}{(x^2-y^2)^2}) +2xy f '(\dfrac{y}{x^2-y^2})(\dfrac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}) =$

$$=f '(\frac{y}{x^2-y^2}) \frac{[(x^2+y^2)(-2xy)+2xy(x^2+y^2)]}{(x^2-y^2)^2} =f '(\frac{y}{x^2-y^2}).0 = 0 .$$

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA2112. Enero-Abril 2010
Primer parcial (50%)
lunes 22 de febrero 2010

TIPO C

3.- El plano tangente a la superficie de ecuación $F(x, y, z)=x^2-2y^2-4z^2-40 = 0$
en el punto $P(x, y, z)$ tiene vector normal paralelo al gradiente $\nabla F(x, y, z) = (2x, -4y, -8z)$ y para que el plano tangente sea paralelo al plano de ecuación $4x-2y+4z=5$, cuyo vector normal es $(4, -2, 4)$, deberá ser :
$(2x, -4y, -8z) = k(4, -2, 4)$, siendo P un punto de la superficie, Por lo tanto tenemos :

$$\begin{cases} 2x=4k \\ -4y=-2k \\ -8z=4k \\ x^2-2y^2-4z^2 = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2k \\ y=k/2 \\ z=-k/2 \\ 4k^2-2(k^2/4)-4(k^2/4) = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2k \\ y=k/2 \\ z=-k/2 \\ k=\pm 4 \end{cases} \Rightarrow$$

Los puntos con la propiedad pedida son los dos puntos siguientes : $A(8, 2, -2)$, $B(-8, -2, 2)$.

4.- Si el vértice opuesto al origen es el punto $P(x, y, z)$ del elipsoide, el volumen del paralelepípedo es : $f(x, y, z) = xyz$ y tenemos que hallar el máximo de esta función, con la condición $g(x, y, z)=4x^2+y^2+z^2-36 = 0$.

Aplicando el método de Lagrange, obtenemos :

$$\begin{cases} \nabla F = \lambda \nabla g \\ 4x^2+y^2+z^2-36 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz=\lambda 8x \\ xz=\lambda 2y \\ xy=\lambda 2z \\ 4x^2+y^2+z^2-36=0 \end{cases}$$

Observemos que debe ser $\lambda\neq 0$ ya que con $\lambda=0$ se obtienen puntos que pertenecen a uno de los ejes y el paralelepípedo degeneraría en una figura de volumen nulo; también ninguna de los tres x, y, z podrá ser negativo ni =0.

Despejando entonces λ de las primeras tres ecuaciones, obtenemos :
$\lambda=\frac{yz}{8x} = \frac{xz}{2y} = \frac{xy}{2z}$ de lo cual sigue : $4x^2=y^2=z^2$, $y=z=2x$, reemplazando en la cuarta ecuación :
$4x^2+(2x)^2+(2x)^2= 36 \Rightarrow x=\sqrt{3}$, $y=z=2\sqrt{3}$.

En conclusión, las dimensiones de las tres aristas (paralelas , respectivamente, al eje *x*, al eje *y* y al eje *z*) del paralelepípedo de volumen máximo son $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$.